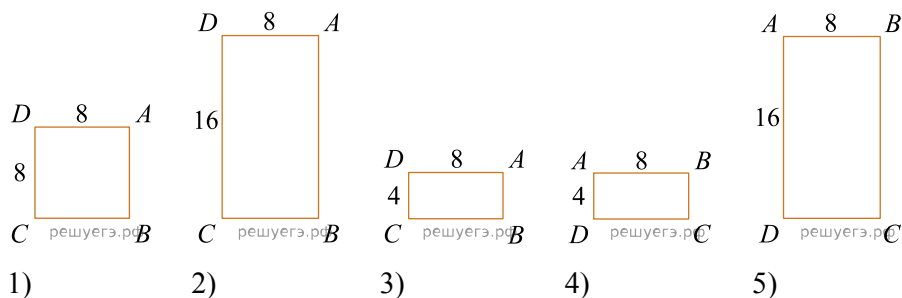


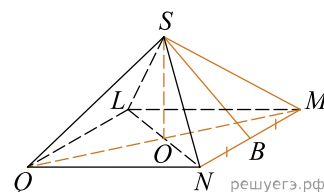
1. Если в правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4, а площадь диагонального сечения равна 12, то ее объем равен ...

2. Укажите номера прямоугольников, изображенных на рисунках 1–5, при вращении которых вокруг стороны AD получается цилиндр, осевым сечением которого является квадрат.



1) 2, 3 2) 1, 5 3) 3, 5 4) 2, 4 5) 1, 3, 5

3. На рисунке изображена правильная четырехугольная пирамида. Среди отрезков SB , MQ , SM , SO , MN укажите отрезок, который является апофемой правильной четырехугольной пирамиды.

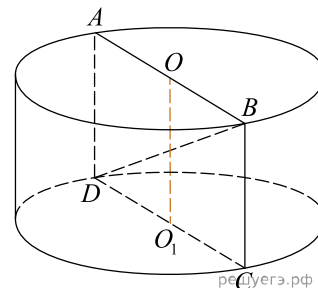


1) SB 2) MQ 3) SM 4) SO 5) MT

4. Найдите длину ребра правильной пятиугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно ребру основания, а сумма длин всех ребер равна 30.

1) 2 2) 3 3) 5 4) 6 5) 9

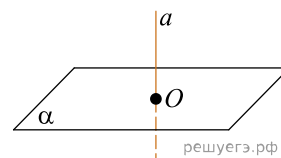
5. Пусть O и O_1 — центры оснований цилиндра, изображенного на рисунке. Тогда образующей цилиндра является отрезок:



1) DB 2) DC 3) DO_1 4) OO_1 5) AD

6. Выберите три верных утверждения, если известно, что прямая a перпендикулярна плоскости α и пересекает ее в точке O .

- 1) Любая прямая, перпендикулярная плоскости α , параллельна прямой a .
- 2) Любая прямая, перпендикулярная прямой a , лежит в плоскости α .
- 3) Прямая a перпендикулярна любой прямой плоскости α .
- 4) Через прямую a проходит единственная плоскость, перпендикулярная плоскости α .

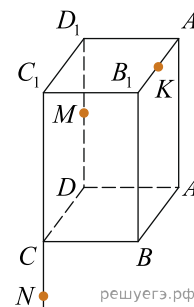


Ответ запишите в виде последовательности цифр в порядке возрастания. Например: 123.

7. Если плоскость касается сферы, диаметр которой равен 24, то расстояние от центра сферы до точки касания равно:

1) 10 2) 12 3) 18 4) 6 5) 24

8. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K и M лежат на ребрах $A_1 B_1$ и DD_1 соответственно, точка N лежит на прямой CC_1 (см. рис.). Выберите верные утверждения:

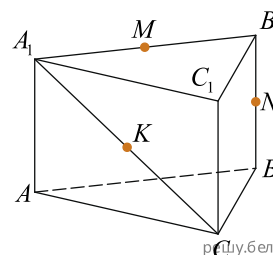


- 1) прямая MN пересекает прямую $C_1 D_1$;
- 2) прямая KN лежит в плоскости $B_1 C_1 C$;
- 3) прямая KM лежит в плоскости $KB_1 M$;
- 4) прямая KM пересекает прямую $B_1 C_1$;
- 5) прямая KM параллельна плоскости $CB B_1$;
- 6) прямая MN параллельна плоскости $AA_1 B_1$.

Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения). Например, 124.

9.

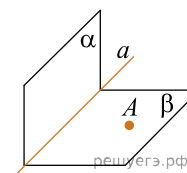
Дана прямая треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$. Точки M и N являются серединами ребер $A_1 B_1$ и BB_1 соответственно, точка K — середина диагонали $A_1 C$ грани $AA_1 C_1 C$ (см. рис.). Выберите верные утверждения:



- 1) прямая NK лежит в плоскости $AA_1 B_1$;
- 2) прямая MN пересекает прямую AB ;
- 3) прямая MN пересекает прямую BC ;
- 4) прямая MK пересекает прямую AB ;
- 5) прямая MK пересекает плоскость ACC_1 ;
- 6) прямая NK параллельна плоскости $A_1 C_1 B_1$.

Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения). Например: 123.

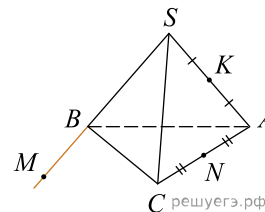
10. Выберите три верных утверждения, если известно, что две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой a и точка A принадлежит плоскости β (см. рис.).



1. Любая прямая, проходящая через точку A и пересекающая плоскость α , пересекает прямую a .
2. Существует единственная прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α .
3. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости β , перпендикулярна плоскости α .
4. Любая точка прямой a лежит в плоскостях α и β .
5. Любая прямая, лежащая в плоскости α и перпендикулярная прямой a , перпендикулярна плоскости β .
6. Любая прямая, перпендикулярная прямой a , принадлежит плоскости β .

Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения). Например: 123.

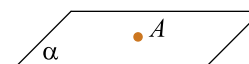
11. Дана треугольная пирамида $SABC$. Точки K и N являются серединами ребер SA и AC соответственно, точка M лежит на прямой SB (см. рис.). Выберите три верных утверждения.



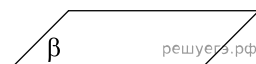
1. Прямая KN параллельна плоскости BSC .
2. Прямая NM пересекает плоскость BSC .
3. Прямая KM пересекает прямую BC .
4. Прямая KM лежит в плоскости ASB .
5. Прямая NM пересекает прямую BC .
6. Прямая KN пересекает плоскость BSC .

Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения). Например: 135.

12. Выберите три верных утверждения, если известно, что точка A лежит в плоскости α , которая параллельна плоскости β (см. рис.).



1. Прямая, проходящая через точку A и пересекающая плоскость α , пересекает плоскость β .
2. Через точку A проходит единственная Плоскость, пересекающая плоскости α и β .
3. Существует единственная прямая, проходящая через точку A и параллельная плоскости β .
4. Любая прямая, лежащая в плоскости β , параллельна плоскости α .
5. Если плоскости α и β пересечены третьей плоскостью, то прямые их пересечения параллельны между собой.
6. Существует единственная прямая, проходящая через точку A и пересекающая плоскость β .



Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения). Например: 123.

13. Прямая a пересекает плоскость α в точке A и образует с плоскостью угол 60° . Точка B лежит на прямой a , причем $AB = 6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α .

- 1) $3\sqrt{2}$ 2) $3\sqrt{6}$ 3) $3\sqrt{3}$ 4) $6\sqrt{6}$ 5) $6\sqrt{3}$

14. Прямая a , параллельная плоскости α , находится от нее на расстоянии 6. Через прямую a проведена плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой b и образующая с ней угол 60° . Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если A и B — такие точки прямой a , что $AB = 4$, а C и D — такие точки прямой b , что $CD = 3$.

- 1) 42 2) $42\sqrt{3}$ 3) $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ 4) 10,5 5) $14\sqrt{3}$

15. Даны две параллельные плоскости α и β , расстояние между которыми равно $4\sqrt{3}$. Прямая a пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно и образует с ними угол 30° . Найдите длину отрезка AB .

- 1) $8\sqrt{3}$ 2) $8\sqrt{2}$ 3) $4\sqrt{3}$ 4) $4\sqrt{6}$ 5) $12\sqrt{3}$

16. Призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точки M и N — середины ребер AD и DC соответственно, $K \in A_1 D_1$, $KA_1 : KD_1 = 1 : 3$. Сечением куба плоскостью, проходящей через точки M , N и K , является:

- 1) восьмиугольник 2) треугольник 3) четырехугольник 4) пятиугольник 5) шестиугольник

17. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является треугольник ABC , в котором $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 25^\circ$, а радиус описанной около него окружности равен $\sqrt{7}$. Найдите длину диагонали грани $AA_1 C_1 C$, если площадь этой грани равна $2\sqrt{35}$.

- 1) $3\sqrt{3}$ 2) $2\sqrt{5}$ 3) $2\sqrt{6}$ 4) $4\sqrt{6}$ 5) $9\sqrt{3}$

18. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π . Найдите объем V цилиндра, если известно, что радиус его основания больше высоты на 3,5. В ответ запишите значение выражения $\frac{6 \cdot V}{\pi}$.

19. Из полного бокала, имеющего форму конуса высотой 9, отлили треть (по объему) жидкости. Вычислите $\frac{1}{2}h^3$, где h — высота оставшейся жидкости.

- 1) 324 2) 182 3) 27 4) 243 5) 81

20. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 28π , и его объем равен 28π . Найдите высоту цилиндра.

- 1) 3 2) 3,5 3) 7 4) 14 5) 28

21. Высота цилиндра в 3 раза больше радиуса его основания. Найдите объем цилиндра, если радиус основания равен $\sqrt{6}$.

- 1) $6\sqrt{6}\pi$ 2) $54\sqrt{6}\pi$ 3) $9\sqrt{6}\pi$ 4) 18π 5) $18\sqrt{6}\pi$

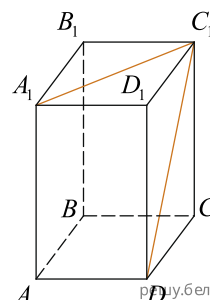
22. Бокал имеет форму конуса. В него налита вода на высоту, равную 4. Если в бокал долить воды объемом, равным одной четвертой объема налитой воды, то вода окажется на высоте, равной:

- 1) $\sqrt[3]{100}$ 2) $2\sqrt[3]{10}$ 3) $2\sqrt[3]{2}$ 4) $2\sqrt[3]{15}$ 5) $2\sqrt[3]{25}$

23. Прямая a пересекает плоскость α в точке A и образует с этой плоскостью угол 30° . Точка B лежит на прямой a , причем $AB = 6\sqrt{2}$. Найдите длину проекции отрезка AB на плоскость α .

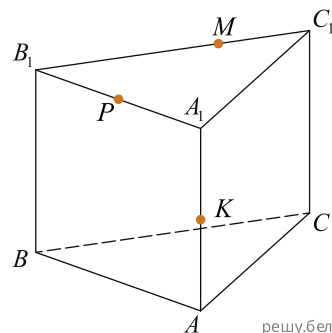
- 1) $3\sqrt{2}$ 2) $3\sqrt{3}$ 3) $6\sqrt{6}$ 4) $3\sqrt{6}$ 5) $6\sqrt{3}$

24. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, у которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 2\sqrt{5}$. Найдите длину пространственной ломаной $B_1 A_1 C_1 D$ (см. рис.).



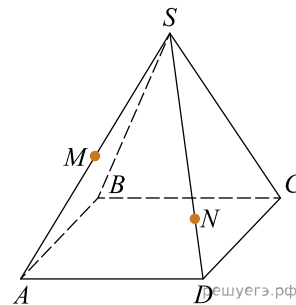
- 1) $7 + 2\sqrt{5}$ 2) 15 3) 14 4) 16 5) 12

25. Многогранник $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны $24\sqrt{3}$. Точки P и K — середины ребер $A_1 B_1$ и AA_1 соответственно, $M \in B_1 C_1$, $C_1 M : C_1 B_1 = 1 : 3$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость, проходящая через M , P , K , пересекает грань $BB_1 C_1 C$.



- 1) $8\sqrt{3}$ 2) $20\sqrt{3}$ 3) $18\sqrt{3}$ 4) $10\sqrt{3}$ 5) $12\sqrt{3}$

26. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 37. Точка M — середина ребра SA . Точка $N \in SD$, $DN : NS = 1 : 3$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость, проходящая через точки N, M, B , пересекает основание $ABCD$ пирамиды.



- 1) $\frac{37\sqrt{13}}{3}$ 2) $46\frac{1}{4}$ 3) $\frac{37\sqrt{10}}{3}$ 4) $\frac{37\sqrt{17}}{4}$ 5) $\frac{37\sqrt{5}}{2}$

27. На рисунках 1 и 2 изображены правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ и ее развертка. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина ломаной ACA_1 равна $3\sqrt{6}$ и точки A, C, A_1 лежат на одной прямой (см. рис. 2).

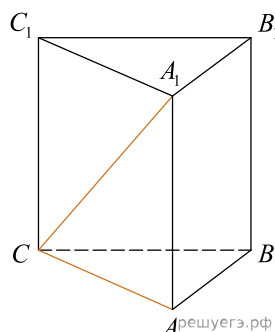


Рис. 1

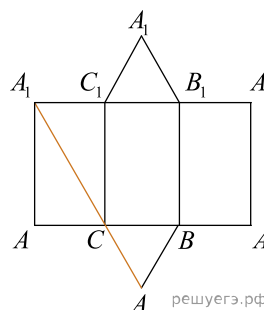
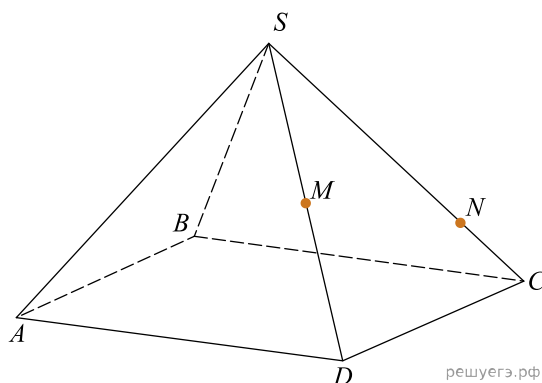


Рис. 2

- 1) $9\sqrt{3}$ 2) 36 3) $18\sqrt{3}$ 4) 18 5) $18\sqrt{2}$

28. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 48. Точка M — середина ребра SD . Точка $N \in SC$, $CN : NS = 1 : 3$ (см. рис.). Найдите длину отрезка, по которому плоскость, проходящая через точки M и N параллельно ребру SA , пересекает основание $ABCD$ пирамиды.



- 1) $16\sqrt{13}$ 2) $16\sqrt{10}$ 3) $8\sqrt{37}$ 4) $12\sqrt{17}$ 5) 56

29. Найдите объем прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, если длины ребер AB и AA_1 равны 4 и 1 соответственно, а расстояние точки A_1 до прямой CD равно 5.

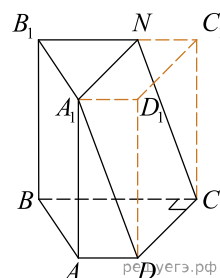
- 1) 20 2) $8\sqrt{6}$ 3) $16\sqrt{6}$ 4) $4\sqrt{6}$ 5) 24

30. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение плоскостью, проходящей через боковое ребро и апофему противоположащей этому ребру боковой грани. Двугранный угол при ребре основания пирамиды равен 45° , а радиус окружности, описанной около сечения, равен $4\sqrt{5}$. Найдите объем пирамиды.

- 1) $48\sqrt{10}$ 2) $96\sqrt{6}$ 3) $192\sqrt{6}$ 4) $128\sqrt{6}$ 5) $128\sqrt{5}$

31. Каждое боковое ребро четырехугольной пирамиды образует с ее высотой, равной $3\sqrt{7}$, угол 30° . Основанием пирамиды является прямоугольник с углом 30° между диагоналями. Найдите объем пирамиды V , в ответ запишите значение выражения $\sqrt{7} \cdot V$.

32. В основании прямой четырехугольной призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, у которой $\angle C = 90^\circ$, BC и AD — основания, $BC = CC_1$. Плоскость, которая проходит через ребро DC и вершину A_1 призмы, образует угол $\alpha = \arctg \frac{5}{3}$ с плоскостью основания (см. рис.) и отсекает часть $NC_1CA_1D_1D$. Если объем призмы равен 48, то объем оставшейся части равен ...



33. Радиус основания цилиндра равен 16. Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает цилиндр по прямоугольнику с площадью, равной 120. Найдите значение выражения $\frac{V}{\pi}$, где V — объем цилиндра, если расстояние от плоскости сечения до оси цилиндра равно $4\sqrt{7}$.

34. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC . Через середины ребер AB и SB проведена секущая плоскость, параллельная ребру BC . Найдите значение выражения $3 \cdot S$, где S — площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если $BC = 6$, $SA = 8$.

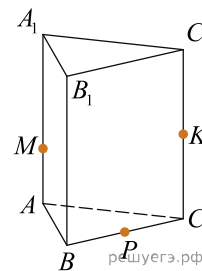
35. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания ABC . Через середины ребер AB и SA проведена секущая плоскость, параллельная ребру AC . Найдите значение выражения $5 \cdot S$, где S — площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если $AC = 32$, $SB = 2$.

36. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, у которой $AB = 5$, $AA_1 = 5$. Точки P и Q — середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Найдите значение выражения $\frac{36}{\cos^2 \varphi}$, где φ — угол между прямыми PQ и AB_1 .

37. В параллелограмме длина одной из сторон вдвое больше длины другой, а острый угол равен 60° . Большая сторона параллелограмма лежит в плоскости α , а его большая диагональ образует с этой плоскостью угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{3}}{14}$. Найдите значение выражения $\frac{15}{\sin^2 \beta}$, где β — угол между плоскостью параллелограмма и плоскостью α .

38. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD_1 = \sqrt{10}$, $DC_1 = 3\sqrt{2}$ и $AC = 4$. Найдите значение выражения $\frac{42}{\cos^2 \varphi}$, где φ — угол между прямыми AD_1 и DC_1 .

39. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны 3. Точки P и K — середины ребер BC и CC_1 соответственно, $M \in AA_1$, $AM : AA_1 = 1 : 3$ (см. рис.). Найдите увеличенный в 25 раз квадрат длины отрезка, по которому плоскость, проходящая через точки M, K, P , пересекает грань AA_1B_1B .



40. В большой круг шара вписан треугольник, длина одной из сторон которого равна 6, а противолежащий этой стороне угол равен 120° . Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3} \cdot V}{\pi}$, где V — объем шара.

41. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и $2\sqrt{7}$, вращается вокруг оси, содержащей его гипотенузу. Найдите значение выражения $\frac{2V}{\pi}$, где V — объем фигуры вращения.

42. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб со стороной $2\sqrt{3}$ и углом BAD , равным $\arccos \frac{3}{4}$. Ребро SD перпендикулярно основанию, а ребро SB образует с основанием угол 60° . Найдите радиус R сферы, проходящей через точки A, B, C и середину ребра SB . В ответ запишите значение выражения R^2 .

43. Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 1728. Точка P лежит на боковом ребре CC_1 так, что $CP : PC_1 = 2 : 1$. Через точку P , вершину D и середину бокового ребра AA_1 проведена секущая плоскость, которая делит прямоугольный параллелепипед на две части. Найдите объем меньшей из частей.

44. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямая четырехугольная призма, объем которой равен 960. Основанием призмы является параллелограмм $ABCD$. Точки M и N принадлежат ребрам $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$, так что $A_1 M : A_1 D_1 = 1 : 2$, $D_1 N : NC_1 = 2 : 1$. Отрезки $A_1 N$ и $B_1 M$ пересекаются в точке K . Найдите объем пирамиды $SB_1 KNC_1$, если $S \in B_1 D$ и $B_1 S : SD = 3 : 1$.

45. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка O так, что $AB = 3AO$. К плоскости $ABCD$ из точки O восстановлен перпендикуляр SO длиной 8. Найдите значение выражения $\sqrt{89} \cos \alpha$, где α — линейный угол двугранного угла $BSCD$, если $CD = 9$, $BC = 5$ и известно, что площадь $ABCD$ равна 45.

46. Прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна 10, высота, проведенная к ней, равна 3, вращается вокруг прямой, перпендикулярной гипотенузе и проходящей в плоскости треугольника через вершину большего острого угла. Найдите объем V тела вращения и в ответ запишите значение выражения $\frac{V}{\pi}$.

47. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен 13. Через сторону основания BC проведено сечение, делящее пополам двугранный угол $SBCA$ и пересекающее боковое ребро SA в точке M . Объем пирамиды $MABC$ равен 6. Найдите значение выражения $\frac{8}{\cos \alpha}$, где α — угол между плоскостью основания и плоскостью боковой грани пирамиды $SABC$.

48. Основанием пирамиды $SABCD$ является выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого перпендикулярны и пересекаются в точке O , $AO = 9$, $OC = 16$, $BO = OD = 12$. Вершина S пирамиды $SABCD$ удалена на расстояние $\frac{61}{7}$ от каждой из прямых AB , BC , CD и AD . Через середину высоты пирамиды $SABCD$ параллельно ее основанию проведена секущая плоскость, которая делит пирамиду на две части. Найдите значение выражения $10 \cdot V$, где V — объем большей из частей.

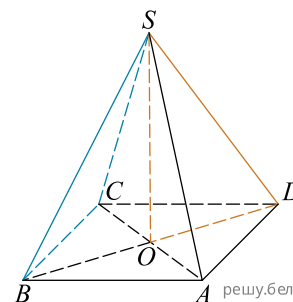
49. Равнобедренная трапеция с основаниями длиной 7 и 3 и острым углом 60° вращается вокруг прямой, содержащей ее боковую сторону. Найдите объем тела вращения V и в ответ запишите значение выражения $\frac{V}{\pi}$.

50. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с длиной ребра, равной 118. На ребрах BC и BB_1 взяты соответственно точки M и N так, что $\frac{BM}{MC} = \frac{2}{3}$ и $\frac{BN}{BB_1} = \frac{2}{5}$. Через точки M , N , A_1 проведена плоскость. Найдите расстояние d от точки C до этой плоскости. В ответ запишите значение выражения d^2 .

51. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точка K лежит на ребре AB куба так, что $AK : KB = 2 : 1$. Найдите значение выражения $\frac{12}{\cos^2 \varphi}$, где φ — угол между прямыми $A_1 K$ и $B_1 D_1$.

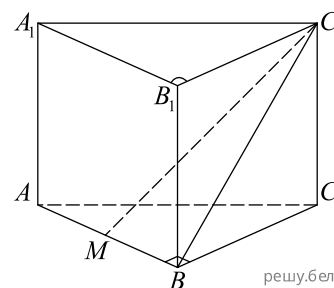
52. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб, у которого косинус угла равен $\frac{7}{8}$ и длина стороны равна 8. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом α , а высота пирамиды равна 18. Найдите значение выражения $2\sqrt{15} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

53. На рисунке изображена правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, точка O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Среди прямых BC ; BD ; SO ; SB ; SD укажите прямую, по которой пересекаются плоскости DSO и SCB .



- 1) BC 2) BD 3) SO 4) SB 5) SD

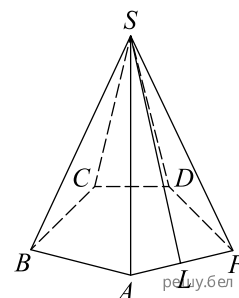
54. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$. Точка M является серединой ребра AB , $\angle ABC = 90^\circ$ (см. рис.). Выберите верные утверждения. В ответе укажите номера выбранных утверждений.



- 1) Расстояние от точки C_1 до прямой AB равно длине отрезка BC_1 .
- 2) Расстояние от точки C_1 до прямой AB равно длине отрезка $C_1 M$.
- 3) Расстояние от точки A до прямой BC равно длине отрезка AB .
- 4) Расстояние между прямыми BB_1 и CC_1 равно длине отрезка BC_1 .
- 5) Расстояние между прямыми $A_1 B_1$ и AB равно длине отрезка AA_1 .
- 6) Расстояние от точки B до прямой AC равно длине отрезка BC .

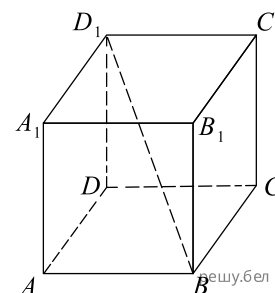
55. Плоскость, параллельная основанию треугольной пирамиды, делит ее высоту в отношении $5 : 3$, если считать от вершины пирамиды. Найдите площадь сечения пирамиды данной плоскостью, если она меньше площади основания пирамиды на 39.

56. Дана правильная пятиугольная пирамида $SABCDF$, у которой длина стороны AF основания $ABCDF$ равна $4\sqrt{3}$, а длина бокового ребра SA равна $7\sqrt{3}$ (см. рис.). Найдите апофему SL пирамиды $SABCDF$.



- 1) $3\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $\sqrt{15}$ 4) $3\sqrt{3}$ 5) $3\sqrt{15}$

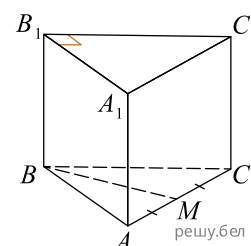
57. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Отрезок BD_1 является диагональю куба. Выберите верные утверждения.



- 1) прямая BD_1 лежит в плоскости $DD_1 C_1$
- 2) прямая BD_1 пересекает плоскость $BB_1 A_1$
- 3) прямая BD_1 лежит в плоскости $B_1 BD$
- 4) прямые BD_1 и $C_1 D_1$ являются скрещивающимися
- 5) прямая BD_1 пересекает прямую AC_1
- 6) прямая BD_1 пересекает прямую $A_1 B_1$

Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения). Например: 134.

58. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. Известно, что $BB_1 = AC = 4\sqrt{5}$. Найдите квадрат длины пространственной ломаной $MBB_1 A_1$, где M — середина ребра AC (см. рис.).



59. Угол BSC правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $2 \arctg \frac{\sqrt{5}}{3}$. Найдите значение выражения $\frac{21 \cdot \cos^2 \beta}{\cos^2 \varphi}$, где β — угол между боковым ребром SB и плоскостью основания ABC , φ — линейный угол двугранного угла $SBCA$.

60. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед, объем которого равен $\frac{5\sqrt{7}}{2}$. Длины сторон AB и BC основания $ABCD$ равны $\sqrt{7}$ и $\sqrt{2}$ соответственно, косинус угла ABC равен $-\frac{\sqrt{14}}{8}$. На ребрах AA_1 и $A_1 B_1$ взяты точки M и N соответственно, такие, что $AM : MA_1 = 4 : 1$, $A_1 N : NB_1 = 1 : 4$. Найдите значение выражения $8\sqrt{66} \cdot \cos \varphi$, где φ — угол между прямыми MN и BC_1 .

61. Точки A , B , C лежат на поверхности шара так, что $AB = 6\sqrt{3}$, $\angle CAB = 15^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. Найдите значение выражения $\frac{3 \cdot V}{\sqrt{14} \cdot \pi}$, где V — объем шара, если расстояние от центра шара до плоскости треугольника ABC равно $\sqrt{2}$.

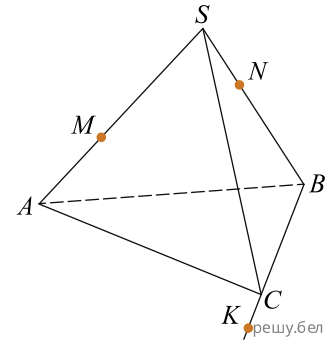
62. Сфера пересечена плоскостью, отстоящей от центра сферы на расстояние b , равное половине радиуса сферы. Найдите диаметр сферы, если $b = 2$.

- 1) 8 2) 4 3) 7 4) 16 5) 12

63. Цилиндр получен вращением квадрата вокруг прямой, содержащей одну из его сторон. Найдите объём полученного цилиндра, если площадь квадрата равна 54.

- 1) 108π 2) $324\sqrt{6}\pi$ 3) $54\sqrt{6}\pi$ 4) $162\sqrt{6}\pi$ 5) 54π

64. Дана треугольная пирамида $SABC$. Точки M и N лежат на рёбрах SA и SB соответственно, точка K лежит на прямой BC (см. рис.). Выберите верные утверждения:



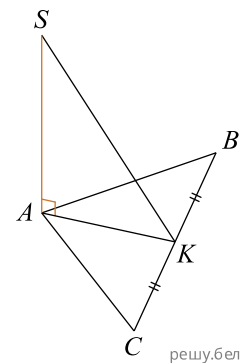
- 1) плоскость MNK пересекает плоскость SAB по прямой MN
- 2) плоскость SNC пересекает плоскость SCA по прямой SK
- 3) плоскость MNK пересекает плоскость SAC по прямой MK
- 4) плоскость MNK пересекает плоскость SBC по прямой NC
- 5) плоскость MNK пересекает плоскость MCN по прямой MN
- 6) плоскость MCN пересекает плоскость SAC по прямой CM

Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения).
Например: 124.

65. Найдите объём треугольной пирамиды $SABC$, у которой ребро SC перпендикулярно рёбрам SA и SB , а $SA = 8$, $SB = 15$, $SC = 14$ и $AB = 17$.

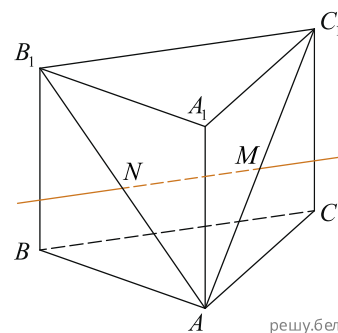
66. Длины сторон основания прямоугольного параллелепипеда равны $6\sqrt{2}$ и $2\sqrt{7}$. Диагональ параллелепипеда образует с меньшей по площади боковой гранью угол $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$. Найдите значение выражения $\frac{63}{\sin^2 \alpha}$, где α — угол между диагональю большей по площади боковой грани и плоскостью диагонального сечения этого параллелепипеда.

67. К плоскости равнобедренного прямоугольного треугольника BAC ($\angle BAC = 90^\circ$) проведён перпендикуляр SA , равный $\sqrt{10}$. Найдите котангенс угла, который образует с плоскостью треугольника BAC прямая SK (точка K — середина стороны BC), если $BC = 4\sqrt{2}$.



- 1) $8\sqrt{3}$ 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 4) $4\sqrt{5}$ 5) $\frac{\sqrt{5}}{20}$

68. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка M является серединой диагонали AC_1 грани AA_1C_1C , точка N является серединой диагонали AB_1 грани AA_1B_1B (см. рис.). Выберите верные утверждения:



- 1) прямая MN лежит в плоскости AA_1C_1
- 2) прямая MN пересекает прямую A_1B_1
- 3) прямые MN и AC являются скрещивающимися
- 4) прямая MN параллельна плоскости CC_1B_1
- 5) прямая MN пересекает плоскость ABC
- 6) прямая MN параллельна прямой BC

Ответ запишите цифрами (порядок записи цифр не имеет значения). Например: 124.

69. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, длина стороны которого равна 8. Расстояния от точки A_1 до плоскости основания призмы и до прямой CD равны соответственно $\sqrt{3}$ и $\sqrt{39}$. Найдите значение выражения $\sqrt{3} \cdot V$, где V — объём данной призмы.

70. Прямоугольный треугольник, у которого длина гипотенузы равна $6\sqrt{2}$ и котангенс одного из острых углов равен $\sqrt{3}$, вращается вокруг прямой, содержащей его меньший катет. Найдите значение выражения $\frac{V}{\sqrt{2} \cdot \pi}$, где V — объём полученного тела.

71. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ грань AA_1C_1C является квадратом, а в основании лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), у которого $AB = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Точка K является серединой ребра BC . Точки M и N лежат на рёбрах AA_1 и A_1C_1 соответственно так, что $A_1M = A_1N$. Найдите значение выражения $\frac{81}{\cos^2 \alpha}$, где α — угол между прямыми MN и C_1K .